数理解析研究所講究録
59巻 1968年 119-127

実的方法による補間空間と作用素の完全連続性

阪大理　早川 款達郎

§1 序

Banach 空間の連続線型作用素に関する凸型定理は Calderon, Stein, Gagliardo, Lions-Peetre 等によって種々研究され，各々 Complex Method 及び Real Method として [1] [2] に述べられている。元来，これらは作用素の連続性を問題にしたが，1960 Krasnosel'skii [3] は L^p 空間の場合は上の凸型定理は作用素の完全連続性を保存することを示めした。Persson [4] は更に広く，作用素の値域の側の Banach 空間の pair がある仮定（approximation hypothesis）を満す場合に Krasnosel'skii と同じような定理が成り立つこと及びその仮定は十分に多くの Banach 空間の pair に対して満されることを証明した。

我々は，ここで実的方法（Real Method）の時は，Persson の仮定がなくても次の定理が成立することを示めす。

定理 $[E_0, E_1]$, $[F_0, F_1]$ を interpolation pair とし, T が $[E_0, E_1]$ から $[F_0, F_1]$ への完全連続な線型作用素とすると T は $S(\theta, p : E_0, E_1)$ から $S(\theta, p : F_0, F_1)$ への作用素として完全連続になる。但し $0<\theta<1$, $1 \le p < \infty$.

(注) $[F_0, F_1]$ が Approximation Hypothesis をみたすとは F_0 の任意の compact set K に対して $\mathcal{L}([F_0, F_1], [F_0, F_1])$ の中の一様有界な族 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_K$ で ① $P(F_i) \subset F_0 \cap F_1$ $i=0,1$ $\forall P \in \mathcal{P}$.
② $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ s.t. $\|(P_\varepsilon - I)x\|_{F_0} \le \varepsilon$ $\forall x \in K$
をみたすものが存在することである。

記号

$\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$; $\mathcal{E}$ は $\mathcal{F}$ の線型部分空間でかつそのうめこみは連続.

$[E_0, E_1]$; interpolation pair

$\mathcal{L}([E_0, E_1], [F_0, F_1])$; $[E_0, E_1]$ から $[F_0, F_1]$ への有界線型作用素のなす Banach 空間. $(= \mathcal{L}(E_0, F_0) \cap \mathcal{L}(E_1, F_1))$.

$K([E_0, E_1], [F_0, F_1])$; 同じく完全連続線型作用素のなす上の右の閉空間.

$\ell^p_\theta(E) = \{ \{x^{(k)}\}_{k=-\infty}^{\infty} ; x^{(k)} \in E, \{ e^{\theta k} \| x^{(k)} \|_E \} \in \ell^p \}$.

$[E_0, E_1]$ に対して.

★ $E_0 \cap E_1$ 及び $E_0 + E_1$ は集合としての $E_0 \cap E_1$ 及び $E_0 + E_1$ に各々

$$\mathrm{Max}\{\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\} \quad \text{及び} \quad \mathrm{Inf}\{\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} ; x = x_0 + x_1\}$$

なるノルムを入れた Banach 空間とする。

★ $$w(p_0, \theta, E_0 ; p_1, \theta-1, E_1) \equiv l_\theta^{p_0}(E_0) \cap l_{\theta-1}^{p_1}(E_1)$$

$$s(p_0, \theta, E_0 ; p_1, \theta-1, E_1) \equiv \{x = \sum_k x^{(k)} ; \{x^{(k)}\} \in w(\cdots)\}.$$

$$\|x\|_s = \mathrm{Inf}\{\|\{x^{(k)}\}\|_w ; \sum_k x^{(k)} (= \sum\{x^{(k)}\}) = x\}.$$

ここで $0 \le \theta \le 1$, $1 \le p \le \infty$.

但し $\theta = 0, 1$ のときは $p = 1$ にかぎる。

★とくに $w(p, \theta, E_0 ; p, \theta-1, E_1)$ を $w(\theta, p ; E_0, E_1)$

$s(p, \theta, E_0 ; p, \theta-1, E_1)$ を $s(\theta, p ; E_0, E_1)$

とかく。

命題 1.

$$s(\nu, p_\nu ; w(\theta_0, p_0 ; E_0, E_1), w(\theta_1, p_1 ; E_0, E_1))$$

$$= w(\theta_\nu, p_\nu ; E_0, E_1)$$

但し $0 < \nu < 1$ $\quad (\theta_\nu, \frac{1}{p_\nu}) = (1-\nu)(\theta_0, \frac{1}{p_0}) + \nu(\theta_1, \frac{1}{p_1}).$

命題2 (Lions. Peetre)

$$S(\nu, p_\nu : S(\theta_0, p_0 : E_0, E_1), S(\theta_1, p_1 : E_0, E_1))$$
$$= S(\theta_\nu, p_\nu : E_0, E_1) .$$

命題3.

$$S(0, 1 : E_0, E_1) = \overline{E_0 \cap E_1}^{(E_0)} \quad (E_0 \cap E_1 \text{ の } E_0 \text{ 内での閉包})$$
$$S(1, 1 : E_0, E_1) = \overline{E_0 \cap E_1}^{(E_1)} \quad (\quad 〃 \quad E_1 \quad 〃 \quad)$$

§2. 定理の証明.

定理は次の2段階に分けて証明される.

(I) $T \in K([E_0, E_1], [F_0, F_1])$

$\Rightarrow T \in K(S(\theta, 1 : E_0, E_1), S(\theta, 1 : F_0, F_1)) \quad 0 \overset{\forall}{<} \theta < 1$

(II) $T \in K(S(\theta, 1 : E_0, E_1), S(\theta, 1 : F_0, F_1))$

かつ

$T \in \mathcal{L}(S(\theta, \infty : E_0, E_1), S(\theta, \infty : F_0, F_1))$

$\Rightarrow T \in K(S(\theta, p : E_0, E_1), S(\theta, p : F_0, F_1)) \quad 1 \overset{\forall}{\leq} p < \infty$

命題3によれば, (I)を示すには, (I')を言えばよい。

I') $T \in K([S(0, 1 : E_0, E_1), S(1, 1 : E_0, E_1)], [F_0, F_1])$

$\Rightarrow T \in K(S(\theta, 1 : E_0, E_1), S(\theta, 1 ; F_0, F_1))$

今、$T \in \mathcal{L}([E_0, E_1], [F_0, F_1])$ に対し、次のような $\tilde{T}$ を定義する。

$$\tilde{T} : w(\theta, p : E_0, E_1) \longrightarrow w(\theta, p : F_0, F_1)$$

$$\tilde{T}\{x^{(k)}\} = \{T x^{(k)}\} \qquad \forall \{x^{(k)}\} \in w(\theta, p : E_0, E_1)$$

このとき $\tilde{T}$ は有界線型作用素であるだけでなく、次のような性質をもつ。

$$T \in K(s(\theta, p : E_0, E_1), s(\theta, p : F_0, F_1))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Sigma \circ \tilde{T} \in K(w(\theta, p : E_0, E_1), s(\theta, p : F_0, F_1))$$

$$\left(\begin{tikzcd} w(\theta, p : E_0, E_1) \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "\Sigma"] & w(\theta, p : F_0, F_1) \arrow[d, "\Sigma"] \\ s(\theta, p : E_0, E_1) \arrow[r, "T"'] & s(\theta, p : F_0, F_1) \end{tikzcd}\right)$$

何故なら、$\Sigma \circ \tilde{T} = T \circ \Sigma$ したがって $\Rightarrow$ はあきらかであるが $\Leftarrow$ は、$s(\theta, p : E_0, E_1)$ の位相は Σ によって、$w(\theta, p : E_0, E_1)$ から導入されたものであるから。

$w(\theta, p : E_0, E_1)$ に次のような projection P_k, P_+, P_- を考える。

$$P_k\{x^{(l)}\} = \{\cdots, 0, 0, \cdots, 0, x^{(-k+1)}, \cdots, x^{(0)}, \cdots, x^{(k-1)}, 0, 0, \cdots\}$$

$$P_+\{x^{(k)}\} = \{\cdots, 0, \cdots, 0, x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}, \cdots\}$$

$$P_- = I - P_+ .$$

前注意によれば (I') は (I'') と同等である.

(I'') $\Sigma\circ\tilde{T} \in K([w(0,1:E_0,E_1), w(1,1;E_0,E_1)], [F_0,F_1])$

$$\Rightarrow \Sigma\circ\tilde{T} \in K(w(\theta,1:E_0,E_1), S(\theta,1:F_0,F_1)).$$

ところで 任意の $k\geq 1$ に対して

$$\Sigma\circ\tilde{T}\circ P_k \in K(w(\theta,1:E_0,E_1), S(\theta,1:F_0,F_1)).$$

は $\tilde{T}\circ P_k \in K(w(\theta,1:E_0,E_1), w(\theta,1:F_0,F_1))$

から導びかれる。

従って $\Sigma\circ\tilde{T}\circ P_k$ が $\Sigma\circ\tilde{T}$ に $\mathcal{L}(w(\theta,1:E_0,E_1), S(\theta,1:F_0,F_1))$ の中で収束することを証明すればよい。

即ち $\Sigma\circ\tilde{T}\cdot(I-P_k) \to 0$ in $\mathcal{L}(w(\theta,1:E_0,E_1), S(\theta,1:F_0,F_1))$.

以下 $\mathcal{L}(w(\theta,p:E_0,E_1), S(\theta,p:F_0,F_1))$ のノルムを $\|\cdot\|_{\theta,p}$ とかくことにしよう。

すると，命題1，及び2と，インターポレーション定理によって.

$$
\begin{aligned}
&|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)|||_{\theta,1} \\
&\leq |||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_+|||_{\theta,1} + |||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_-|||_{\theta,1} \\
&\leq C\{|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_+|||_{0,1}^{1-\theta}\,|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_+|||_{1,1}^{\theta} + \\
&\qquad + |||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_-|||_{0,1}^{1-\theta}\,|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_-|||_{1,1}^{\theta}\}.
\end{aligned}
$$

$$|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_+|||_{0,1} \leq |||\Sigma\circ\tilde{T}|||_{0,1} \leq \|T\|$$

$$|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_-|||_{1,1} \leq |||\Sigma\circ\tilde{T}|||_{1,1} \leq \|T\|$$

従って $|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_+|||_{1,1} \to 0$

$$|||\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_k)P_-|||_{0,1} \to 0$$

を示せばよい。

より強く次の補題が成立する。

<u>補題 1.</u>

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad s.t.$

$$\|\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_N)P_-x\|_{F_0} \leq \varepsilon\,\|(I-P_N)P_-x\|_{W(0,1:E_0,E_1)}$$

$$\forall x \in W(0,1:E_0,E_1), \quad \forall N \geq N_\varepsilon.$$

同様に

$$\|\Sigma\circ\tilde{T}\circ(I-P_N)P_+x\|_{F_1} \leq \varepsilon\,\|(I-P_N)P_+x\|_{W(1,1:E_0,E_1)}$$

$$\forall x \in W(1,1:E_0,E_1) \quad \forall N \geq N_\varepsilon.$$

(II) は (I) における考えと同様に

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k)^{\sim} \|_{\theta, p} \to 0 \quad \text{を示すのに}$$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) \|_{\theta, 1} \to 0 \quad \text{を云えばよいが}$$

これは次の補題から出る。

<u>補題2</u>

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \cdot (I - P_N) x \|_{S(\theta, 1 : F_0, F_1)} \le \varepsilon \| (I - P_N) x \|_{W(\theta, 1 : E_0, E_1)}.$$

補題1と2は全く同じ型をしているが、
補1では ℓ^1 の性質

$$\| \{x^{(\ell)}\} \|_{\ell^1} = \sum_{k \ge 1} \| (P_{k+1} - P_k) P_+ \{x^{(\ell)}\} \|_{\ell^1}$$

$$+ \sum_{k \ge 1} \| (P_{k+1} - P_k) P_- \{x^{(\ell)}\} \|_{\ell^1}$$

補題2では、ℓ^∞ の次のような性質、

$x = \{x^{(\ell)}\},\ y = \{y^{(\ell)}\} \in \ell^\infty$ かつ $\|x\|_{\ell^\infty} \le 1,\ \|y\|_{\ell^\infty} \le 1$

$x^{(\ell)} \ne 0 \Rightarrow y^{(\ell)} = 0$ とすると

$$\|x + y\|_{\ell^\infty} \le \max\{\|x\|_{\ell^\infty}, \|y\|_{\ell^\infty}\} \le 1.$$

を用いて証明される。

文献表。

[1] Calderon Studia Math. 24 ('64) pp 113-190. Intermediate spaces and interpolation, the complex method.

[2] Lions-Peetre I.H.E.S. 19 ('64) p 5-68. Sur une classe d'espaces d'interpolation.

[3] Krasnoselskii Dokl. A. Nauk 131 ('60) 246-248. On a theorem of M. Riesz.

[4] Persson Ark. Math. 5 ('64) 215-219. Compact linear mappings between interp. spaces.

[5] Peetre. J. Ric. di Mat. 12 ('63) 248-261. Sur le nombre de paramètres dans la deffinition de certains espaces d'interpolation.